第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1103-09

广义非线性集值混合拟变分不等式的扰动迭代算法*

胡慧英, 曾六川

(上海师范大学数理学院，上海 200234)

摘 要: 本文对一类广义非线性集值混合拟变分不等式进行了研究。首先，利用刘理蔚与李育强的结果，可知黄南京的结果中出现的集值映像实际上是单值的。其次，利用Siddiqi和Ansari的方法以及不动点理论，我们证明了这类混合拟变分不等式解的存在性，并给出了一个解这类混合拟变分不等式的新的扰动迭代算法。最后，讨论了这个新的扰动迭代算法的收敛判据。

关键词: 集值混合拟变分不等式；扰动迭代算法；极大单调映象；不动点理论

分类号: **AMS**(2000) 47H09; 47H10; 47H17 **中图分类号**: O177.91 **文献标识码**: A

1 引言及预备

设H是一个实Hilbert空间，其范数为$\|\cdot\|$，内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle$。令$G,S,T:H\to 2^H$是集值映象，其中$2^H$表示$H$的非空子集之族。$p:H\to H$和$N:H\times H\to H$是单值映象。假设$M:H\times H\to 2^H$是集值映象，使得对每个固定的$t\in H$，$M(\cdot,t):H\to 2^H$是极大单调映象及$\mathrm{Range}(p)\cap\mathrm{dom}(M(\cdot,t))\neq\emptyset$，对任意的$t\in H$。考虑如下的问题：

寻求$u\in H$，$x\in S(u)$，$y\in T(u)$，$z\in G(u)$，使得

$$\begin{cases} p(u)\in\mathrm{dom}(M(\cdot,z)), \\ 0\in N(x,y)+M(p(u),z). \end{cases} \tag{1}$$

问题(1)称为一般广义非线性集值混合拟变分不等式，由Huang[2]引入和研究。

在文献[2]中，Huang研究了这类广义非线性集值混合拟变分不等式，并发展了寻求近似解的迭代算法，且证明了这类广义非线性集值混合拟变分不等式解的存在性以及由此算法生成的近似解序列的收敛性。不过，值得指出，在他的主要结果定理4.1[2]中涉及到的集值映象实质上是单值映象。事实上，Liu与Li[3]已证明了下面的定理。

定理L-L[3] 设$N(\cdot,\cdot)$依第一个变量是Lipschitz连续的，且具有常数$\beta>0$。T是H-Lipschitz的，具有常数$\mu>0$，且关于算子$N(\cdot,\cdot)$的第一个变量是强单调的，若对任意固定的$k\in H$，$\mathrm{int}D(N(T(\cdot),k))\neq\emptyset$，则$N(T(\cdot),k)$不可能在$\mathrm{int}D(N(T(\cdot),k))$是多值的。

本文继续研究由Huang[2]引入的广义非线性集值混合拟变分不等式，利用Siddiqi和Ansari[7]的方法，并应用不动点理论来证明解的存在性，发展了一个新的扰动迭代算法，并且讨论了这个扰动迭代算法的收敛判据。

下面，我们回顾一些定义及论文中需要的结论。

定义1.1 映象$g:H\to H$称为

收稿日期: 2007-04-16. **作者简介**: 胡慧英(1978年11月生)，女，博士，讲师. 研究方向：计算数学.

***基金项目**: 上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金.

(i) δ-强单调的，如果存在常数 $\delta > 0$，使得

$$\langle g(u_1) - g(u_2), u_1 - u_2\rangle \geq \delta\|u_1 - u_2\|^2, \quad \forall\, u_i \in H, \quad i = 1,2;$$

(ii) σ-Lipschitz 连续的，如果存在常数 $\sigma > 0$，使得

$$\|g(u_1) - g(u_2)\| \leq \sigma\|u_1 - u_2\|, \quad \forall\, u_i \in H, \quad i = 1,2.$$

定义 1.2 集值映象 $S : H \to 2^H$ 称为

(i) 依 $N(\cdot,\cdot) : H \times H \to H$ 的第一个变量是 α-强单调的，如存在常数 $\alpha > 0$，使得

$$\langle N(x_1,\cdot) - N(x_2,\cdot), u_1 - u_2\rangle \geq \alpha\|u_1 - u_2\|^2, \quad \forall\, x_i \in S(u_i), \quad i = 1,2;$$

(ii) η-Lipschitz 连续的，如果存在常数 $\eta > 0$，使得

$$\delta(Su_1, Su_2) \leq \|u_1 - u_2\|, \quad \forall\, u_i \in H, \quad i = 1,2,$$

其中对任意的 $A, B \in 2^H$，$\delta(A,B) = \sup\{\|a - b\|, a \in A, b \in B\}$，见文献 [1]。

定义 1.3 $N : H \times H \to H$ 称为依第一个变量是 β-Lipschitz 连续的，如果存在 $\beta > 0$，使得

$$\|N(u_1,\cdot) - N(u_2,\cdot)\| \leq \beta\|u_1 - u_2\|, \quad \forall\, u_i \in H, \quad i = 1,2.$$

同样的方法我们可以定义 $N(\cdot,\cdot)$ 依第二个变量的 Lipschitz 连续性。

引理 1.1[4,5] 设 $M : H \to 2^H$ 是极大单调映象，则对每个 $\rho > 0$，预解算子

$$J_\rho^M = (I + \rho M)^{-1} : H \to H$$

是非扩张的，即

$$J_\rho^M(u_1) - J_\rho^M(u_2) \leq \|u_1 - u_2\|, \quad \forall\, u_i \in H, \quad i = 1,2.$$

2 迭代算法

已经知道，如果 M 是 $H \to 2^H$ 的极大单调映象，则对每个 $\mu > 0$，预解算子 $(I + \mu M)^{-1}$ 是从 $H \to H$ 的单值非扩张算子，利用预解算子的技巧，把广义非线性混合拟变分不等式 (1) 转化为容易处理的等价问题是可能的，为了得到容易处理的等价问题，在 (1) 中乘以某个 $\rho > 0$，再加上 $p(u)$，得到

$$p(u) - \rho N(x,y) \in p(u) + \rho M(p(u), z)$$

当且仅当

$$p(u) = J_\rho^{M(\cdot,z)}(p(u) - \rho N(x,y)),$$

其中 $J_\rho^{M(\cdot,z)} = (I + \rho M(\cdot,z))^{-1}$。

引理 2.1 (u^*, x^*, y^*, z^*) 是问题 (1) 的解，当且仅当，对某个 $\rho > 0$，下述映象

$$F(u) = \cup_{x\in S(u)} \cup_{y\in T(u)} \cup_{z\in G(u)} \left[u - p(u) + J_\rho^{M(\cdot,z)}(p(u) - \rho N(x,y))\right] \tag{2}$$

有不动点 u^*。其中 ρ 是常数，I 是 H 上的恒等映象。

证明 设 (u^*,x^*,y^*,z^*) 是问题 (1) 的解，则有

$$u^* \in H, \quad x^* \in S(u^*), \quad y^* \in T(u^*), \quad z^* \in G(u^*),$$

使得 $p(u^*) \in \mathrm{dom}(M(\cdot,z^*))$ 及

$$p(u^*) - \rho N(x^*,y^*) \in p(u^*) + \rho M(p(u^*),z^*) = (I+\rho M(\cdot,z^*))(p(u^*)),$$

所以

$$p(u^*) = J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(p(u^*) - \rho N(x^*,y^*)).$$

于是

$$\begin{aligned} u^* &= u^* - p(u^*) + J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(p(u^*) - \rho N(x^*,y^*)) \\ &\in \cup_{x^*\in S(u^*)} \cup_{y^*\in T(u^*)} \cup_{z^*\in G(u^*)} \big[u^* - p(u^*) + J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(p(u^*) - \rho N(x^*,y^*))\big], \end{aligned}$$

从而 $u^* \in H$ 是 F 的不动点。

反之，如果 u^* 是 F 的不动点，则由 F 的定义，存在 $x^* \in Su^*$，$y^* \in Tu^*$，$z^* \in Gu^*$，使得

$$u^* = u^* - p(u^*) + J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(p(u^*) - \rho N(x^*,y^*)).$$

因此，由 $J_\rho^{M(\cdot,z)}$ 的定义，我们有

$$p(u^*) - \rho N(x^*,y^*) \in p(u^*) + \rho M(\cdot,z^*)(p(u^*)).$$

注意到 $\rho > 0$，我们有

$$0 \in N(x^*,y^*) + M(p(u^*),z^*),$$

并且对任意的 $t \in H$，$\mathrm{Range}(p) \cap \mathrm{dom}(M(\cdot,t)) \neq \emptyset$。

因此，(u^*,x^*,y^*,z^*) 是问题 (1) 的解。

算法 2.1 (一个新的扰动迭代算法)

设 $S,T,G: H \to 2^H$，$p: H \to H$。给定 $u_0 \in H$，$\{u_n\}$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 由下式定义

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n\big[v_n - p(v_n) + J_\rho^{M(\cdot,\overline{z_n})}(p(v_n) - \rho N(\overline{x_n},\overline{y_n}))\big] + e_n \\ v_n &= (1-\beta_n)u_n + \beta_n\big[u_n - p(u_n) + J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_n) - \rho N(x_n,y_n))\big] + f_n, \\ &\qquad n = 0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

其中对任意的 $n \geq 0$，序列 $\overline{x_n} \in S(v_n)$，$\overline{y_n} \in T(v_n)$，$\overline{z_n} \in G(v_n)$，$x_n \in S(u_n)$，$y_n \in T(u_n)$，$z_n \in G(u_n)$，$\{e_n\}$，$\{f_n\}$ 是 H 中因不精确的计算而引起的误差，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 是实序列，满足

$$\alpha_0 = 1, \quad 0 \leq \alpha_n, \quad \beta_n < 1, \quad \forall\, n \geq 0, \quad \Sigma_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty,$$

$\rho > 0$ 是常数。

3 存在和收敛的结果

本节，我们证明问题 (1) 的解的存在性，并讨论这个扰动迭代算法的收敛判据。

为了得到我们的结论，我们需要如下的引理。

引理 3.1[6] 设 $\{\lambda_n\}$ 是区间 [0,1] 中的实数列，$\{\gamma_n\}$ 与 $\{\mu_n\}$ 都是非负实数列，而且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n<\infty.$$

则有下列结论：

(i) 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 n_0，使得

$$\gamma_{n+1}<(1-\lambda_n)\gamma_n+\varepsilon\cdot\lambda_n+\mu_n,\quad \forall\, n\geq n_0,$$

则有 $0\leq \lim_{n\to\infty}\sup\gamma_n\leq\varepsilon$。

(ii) 若存在自然数 n_1，使得

$$\gamma_{n+1}\geq(1-\lambda_n)\gamma_n+\lambda_n\cdot\sigma_n+\mu_n,\quad \forall\, n\geq n_1,$$

其中 $\{\sigma_n\}$ 是非负实数列，满足 $\sigma_n\to 0(n\to\infty)$，则有 $\lim_{n\to\infty}\sup\gamma_n=0$。

定理 3.1 设 $N(\cdot,\cdot)$ 依第一个变量，第二个变量分别是 β-Lipschitz 连续和 ξ-Lipschitz 连续的，$S:H\to 2^H$ 依 $N(\cdot,\cdot)$ 的第一个变量是 α-强单调的，$S, T, G: H\to 2^H$ 分别是 η-Lipschitz 连续，γ-Lipschitz 连续和 s-Lipschitz连续的，$p:H\to H$ 是 δ-强单调的和 σ-Lipschitz 连续的。假设存在常数 $\lambda>0$ 及 $\rho>0$ 使得

$$\|J_\rho^{M(\cdot,x)}(z)-J_\rho^{M(\cdot,y)}(z)\|\leq\lambda\|x-y\|,\quad \forall\, x, y, z\in H, \tag{3}$$

而且

$$\begin{aligned}&\left|\rho-\tfrac{\alpha+\xi\gamma(k-1)}{\beta^2\eta^2-\xi^2\gamma^2}\right|<\frac{\sqrt{(\alpha+\xi\gamma(k-1))^2-(\beta^2\eta^2-\xi^2\gamma^2)k(2-k)}}{\beta^2\eta^2-\xi^2\gamma^2},\\ &\alpha>\xi\gamma(1-k)+\sqrt{(\beta^2\eta^2-\xi^2\gamma^2)k(2-k)},\quad \xi\gamma<\eta\beta,\\ &\rho\xi\gamma<1-k,\quad k=2\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\lambda s<1.\end{aligned} \tag{4}$$

则 (u^*,x^*,y^*,z^*) 是问题 (1) 的解。

此外，如果 (i) $\Sigma_{n=0}^{\infty}\|e_n\|<+\infty$, (ii) $\|f_n\|\to 0,\ n\to\infty$。则有

$$u_n\to u^*,\quad x_n\to x^*,\quad y_n\to y^*,\quad z_n\to z^*,\quad (n\to\infty).$$

证明 首先证明问题 (1) 有解 (u^*,x^*,y^*,z^*)。利用引理 2.1，只要证明 (2) 式中定义的映象 $F: H\to 2^H$ 有不动点 u^* 即可。对任意的 $u_1, u_2\in H$，$m\in F(u_1)$，$n\in F(u_2)$，存在 $x_1\in S(u_1)$，$x_2\in S(u_2)$，$y_1\in T(u_1)$，$y_2\in T(u_2)$，$z_1\in G(u_1)$，$z_2\in G(u_2)$，使得

$$m=u_1-p(u_1)+J_\rho^{M(\cdot,z_1)}\big(p(u_1)-\rho N(x_1,y_1)\big)$$

且

$$n=u_2-p(u_2)+J_\rho^{M(\cdot,z_2)}\big(p(u_2)-\rho N(x_2,y_2)\big).$$

由引理1.1及(3)式，有

$$\begin{aligned}\|m-n\| &\le \|u_1-u_2-\big(p(u_1)-p(u_2)\big)\|\\&\quad+\|J\rho^{M(\cdot,z_1)}\big(p(u_1)-\rho N(x_1,y_1)\big)-J\rho^{M(\cdot,z_2)}\big(p(u_2)-\rho N(x_2,y_2)\big)\|\\&\le \|u_1-u_2-\big(p(u_1)-p(u_2)\big)\|\\&\quad+\|J\rho^{M(\cdot,z_2)}\big(p(u_1)-\rho N(x_1,y_1)\big)-J\rho^{M(\cdot,z_1)}\big(p(u_1)-\rho N(x_1,y_1)\big)\|\\&\quad+\|J\rho^{M(\cdot,z_2)}\big(p(u_2)-\rho N(x_2,y_2)\big)-J\rho^{M(\cdot,z_2)}\big(p(u_1)-\rho N(x_1,y_1)\big)\|\\&\le \|u_1-u_2-\big(p(u_1)-p(u_2)\big)\|+\lambda\|z_1-z_2\|\\&\quad+\|p(u_2)-\rho N(x_2,y_2)-\big(p(u_1)-\rho N(x_1,y_1)\big)\|\\&\le 2\|u_1-u_2-\big(p(u_1)-p(u_2)\big)\|+\lambda\|z_1-z_2\|\\&\quad+\|u_1-u_2-\rho\big(N(x_1,y_1)-N(x_2,y_2)\big)\|\\&\le 2\|u_1-u_2-\big(p(u_1)-p(u_2)\big)\|+\lambda\|z_1-z_2\|\\&\quad+\|u_1-u_2-\rho\big(N(x_1,y_1)-N(x_2,y_1)\big)\|+\rho\|N(x_2,y_1)-N(x_2,y_2)\|. \end{aligned}\tag{5}$$

利用p的δ-强单调性和σ-Lipschitz连续性，我们得到

$$\|u_1-u_2-\big(p(u_1)-p(u_2)\big)\|^2\le(1-2\delta+\sigma^2)\|u_1-u_2\|^2.\tag{6}$$

由于S是η-Lipschitz连续的和依$N(\cdot,\cdot)$的第一个元是α-强单调的及$N(\cdot,\cdot)$依第一个元是β-Lipschitz连续的，我们有

$$\begin{aligned}&\|u_1-u_2-\rho\big(N(x_1,y_1)-N(x_2,y_1)\big)\|^2\\=&\ \|u_1-u_2\|^2-2\rho\langle u_1-u_2,N(x_1,y_1)-N(x_2,y_1)\rangle+\rho^2\|N(x_1,y_1)-N(x_2,y_1)\|^2\\\le&\ \|u_1-u_2\|^2-2\rho\alpha\|u_1-u_2\|^2+\rho^2\beta^2\|x_1-x_2\|^2\\\le&\ \|u_1-u_2\|^2-2\rho\alpha\|u_1-u_2\|^2+\rho^2\beta^2(\delta(Su_1,Su_2))^2\\\le&\ (1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2)\|u_1-u_2\|^2,\end{aligned}\tag{7}$$

进一步，由于T,G分别是γ-Lipschitz连续和s-Lipschitz连续的以及$N(\cdot,\cdot)$依第二个元是ξ-Lipschitz连续的，我们有

$$\|N(x_2,y_1)-N(x_2,y_2)\|\le\xi\|y_1-y_2\|\le\xi\delta(Tu_1,Tu_2)\le\xi\gamma\|u_1-u_2\|,\tag{8}$$

$$\|z_1-z_2\|\le\delta(Gu_1,Gu_2)\le s\|u_1-u_2\|.\tag{9}$$

由(5)-(9)，我们有

$$\begin{aligned}\delta(F(u_1),F(u_2)) &\le \big(2\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\lambda s+\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}+\rho\xi\gamma\big)\|u_1-u_2\|\\&= (k+t(\rho)+\rho\xi\gamma)\|u_1-u_2\|=\theta\|u_1-u_2\|,\end{aligned}\tag{10}$$

其中$k=2\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\lambda s$，$t(\rho)=\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}$，且$\theta=k+t(\rho)+\rho\xi\gamma$。利用条件(4)，我们知道$0<\theta<1$。由(10)和Siddiqi和Ansara[7]的定理3.1可知F有不动点$u^*\in H$。因此，由引理2.1，存在$x^*\in S(u^*)$，$y^*\in T(u^*)$，$z^*\in G(u^*)$使得(u^*,x^*,y^*,z^*)是问题(1)的解。

接下去，我们证明由扰动迭代算法生成的序列 $\{u_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 分别强收敛到 u^*,x^*, y^* 和 z^*。由于 (1) 有解 (u^*,x^*,y^*,z^*)，则由引理2.1，我们有

$$u^*=u^*-p(u^*)+J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(p(u^*)-\rho N(x^*,y^*)).$$

利用证明 (6), (7) 的方法，知

$$\|u_n-u^*-(p(u_n)-p(u^*))\|\le\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}\|u_n-u^*\|,$$

$$\|v_n-u^*-(p(v_n)-p(u^*))\|\le\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}\|v_n-u^*\|,$$

$$\|u_n-u^*-\rho(N(x_n,y_n)-N(x^*,y_n))\|\le\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}\|u_n-u^*\|,$$

$$\|v_n-u^*-\rho(N(\overline{x_n},\overline{y_n})-N(x^*,\overline{y_n}))\|\le\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}\|v_n-u^*\|.$$

设

$$h(u^*)=p(u^*)-\rho N(x^*,y^*),\quad h(u_n)=p(u_n)-\rho N(x_n,y_n),\quad h(v_n)=p(v_n)-\rho N(\overline{x_n},\overline{y_n}),$$

我们有

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u^*\| &= \Big\|(1-\alpha_n)u_n+\alpha_n\big[v_n-p(v_n)+J_\rho^{M(\cdot,\overline{z_n})}(h(v_n))\big]+e_n\\ &\quad -(1-\alpha_n)u^*-\alpha_n\big[u^*-p(u^*)+J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(h(u^*))\big]\Big\|\\ &\le (1-\alpha_n)\|u_n-u^*\|+\alpha_n\|v_n-u^*-(p(v_n)-p(u^*))\|\\ &\quad +\alpha_n\Big\|J_\rho^{M(\cdot,\overline{z_n})}(h(v_n))-J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(h(u^*))\Big\|+\|e_n\|.\end{aligned}\tag{11}$$

由于 $J_\rho^{M(\cdot,\overline{z_n})}$ 是非扩张的，(3) 式，T,G 分别是 γ-Lipschitz 连续和 s-Lipschitz 连续的以及 N 依第二个元的 ξ-Lipschitz 连续性，我们有

$$\begin{aligned}&\|J_\rho^{M(\cdot,\overline{z_n})}(h(v_n))-J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(h(u^*))\|\\ \le\ &\|h(v_n)-h(u^*)\|+\lambda\|\overline{z_n}-z^*\|\\ \le\ &\|p(v_n)-p(u^*)-\rho(N(\overline{x_n},\overline{y_n})-N(x^*,y^*))\|+\lambda\|\overline{z_n}-z^*\|\\ \le\ &\|v_n-u^*-(p(v_n)-p(u^*))\|+\|v_n-u^*-\rho(N(\overline{x_n},\overline{y_n})-N(x^*,y^*))\|+\lambda\|\overline{z_n}-z^*\|\\ \le\ &\|v_n-u^*-(p(v_n)-p(u^*))\|+\|v_n-u^*-\rho(N(\overline{x_n},\overline{y_n})-N(x^*,\overline{y_n}))\|\\ &+\|\rho(N(x^*,\overline{y_n})-N(x^*,y^*))\|+\lambda\|\overline{z_n}-z^*\|\\ \le\ &\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}\|v_n-u^*\|+\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}\|v_n-u^*\|+\rho\xi\|\overline{y_n}-y^*\|+\lambda\|\overline{z_n}-z^*\|\\ \le\ &\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}\|v_n-u^*\|+\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}\|v_n-u^*\|\\ &+\rho\xi\delta(T(v_n),T(u^*))+\lambda\delta(G(v_n),G(u^*))\\ \le\ &(\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}+\rho\xi\gamma+\lambda s)\|v_n-u^*\|.\end{aligned}\tag{12}$$

结合 (11) 与 (12)，有

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u^*\| &\le (1-\alpha_n)\|u_n-u^*\|+\alpha_n\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}\|v_n-u^*\|\\&\quad+\alpha_n\big(\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}+\rho\xi\gamma+\lambda s\big)\|v_n-u^*\|+\|e_n\|\\&= (1-\alpha_n)\|u_n-u^*\|+\alpha_n\theta\|v_n-u^*\|+\|e_n\|,\end{aligned}\tag{13}$$

其中 $\theta=2\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}+\rho\xi\gamma+\lambda s$，接下来

$$\begin{aligned}\|v_n-u^*\| &= \big\|(1-\beta_n)u_n+\beta_n\big[u_n-p(u_n)+J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(h(u_n))\big]\\&\quad+f_n-(1-\beta_n)u^*-\beta_n\big[u^*-p(u^*)+J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(h(u^*))\big]\big\|\\&\le (1-\beta_n)\|u_n-u^*\|+\beta_n\|u_n-u^*-(p(u_n)-p(u^*))\|\\&\quad+\beta_n\big\|J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(h(u_n))-J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(h(u^*))\big\|+\|f_n\|,\end{aligned}\tag{14}$$

利用证明 (12) 的方法，我们有

$$\begin{aligned}&\|J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(h(u_n))-J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(h(u^*))\|\\&\le \big(\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}+\rho\xi\gamma+\lambda s\big)\|u_n-u^*\|,\end{aligned}\tag{15}$$

结合 (14) 与 (15)，可得

$$\begin{aligned}\|v_n-u^*\| &\le (1-\beta_n)\|u_n-u^*\|+\beta_n\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}\|u_n-u^*\|\\&\quad+\beta_n\big(\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\eta^2}+\rho\xi\gamma+\lambda s\big)\|u_n-u^*\|+\|f_n\|\\&= (1-\beta_n)\|u_n-u^*\|+\beta_n\theta\|u_n-u^*\|+\|f_n\|\\&\le (1-\beta_n(1-\theta))\|u_n-u^*\|+\|f_n\|\\&\le \|u_n-u^*\|+\|f_n\|.\end{aligned}\tag{16}$$

由于 $1-\beta_n(1-\theta)\le 1$，结合 (13) 和 (16)，得

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u^*\| &\le (1-\alpha_n)\|u_n-u^*\|+\alpha_n\theta\big(\|u_n-u^*\|+\|f_n\|\big)+\|e_n\|\\&= (1-\alpha_n(1-\theta))\|u_n-u^*\|+\alpha_n\theta\|f_n\|+\|e_n\|\\&= (1-\alpha_n(1-\theta))\|u_n-u^*\|+\alpha_n(1-\theta)\frac{\theta\|f_n\|}{1-\theta}+\|e_n\|,\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $h_n=\frac{\theta\|f_n\|}{1-\theta}\to 0\,(n\to\infty)$，$\sum_{n=0}^{\infty}\|e_n\|<\infty$。故由 (17) 式和引理 3.1 知 $u_n\to u^*\,(n\to\infty)$。又因为

$$\|x_n-x^*\|\le\delta(S(u_n),\,S(u^*))\le\eta\|u_n-u^*\|\to 0,\quad n\to\infty,$$

$$\|y_n-y^*\|\le\delta(T(u_n),\,T(u^*))\le\gamma\|u_n-u^*\|\to 0,\quad n\to\infty,$$

以及

$$\|z_n - z^*\| \le \delta(G(u_n), G(u^*)) \le s\|u_n - u^*\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

因此

$$x_n \to x^*, \quad y_n \to y^*, \quad z_n \to z^*.$$

注 3.1 本文主要利用 Siddiqi 和 Ansari[7] 的方法，应用不动点理论来证明解的存在性，而在 Huang[2] 的定理 4.1 中涉及到的映象实质上是单值映象。本文修正了 Huang[2] 中的定理 4.1。

注 3.2 虽然本文的定理 3.1 与 Huang[2] 的定理 4.1 在存在性的系数上是一致的，但其意义却不同。Huang[2] 是按照 Hausdorff 距离来定义集值映象的 Lipschitz 连续性的，其中集合 A, B 的 Hausdorff 距离是指

$$H(A,B) = \max\Big\{ \sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\Big\},$$

而本文中集值映象是按照 $\delta(A,B)$ 来定义 Lipschitz 连续性的，其中

$$\delta(A,B) = \sup\big\{ \|a-b\|,\ a\in A,\ b\in B\big\}, \quad \forall\, A,B\in 2^H.$$

需要指出的是，按照文中的定义 $\delta(A,B)$，很明显有 $H(A,B) \le \delta(A,B)$。因此，若集值映象按 $\delta(A,B)$ Lipschitz 连续，则一定按 Hausdorff 意义下的距离 $H(A,B)$ Lipschitz 连续。

注 3.3 在算法上，在 Huang[2] 中，作者利用 Nadler[8] 的方法来构造算法，为构造 $\{u_n\}$ 需要利用 Nadler 定理来选取序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$。由 Nalder 定理，对 $x_n\in S(u_n)$, $y_n\in T(u_n)$, $z_n\in G(u_n)$，选取 $x_{n+1}\in S(u_{n+1})$, $y_{n+1}\in T(u_{n+1})$, $z_{n+1}\in G(u_{n+1})$，使得

$$\|x_n - x_{n+1}\| \le (1+(n+1)^{-1})H(S(u_n),S(u_{n+1})), \quad x_n\in S(u_n),$$

$$\|y_n - y_{n+1}\| \le (1+(n+1)^{-1})H(T(u_n),T(u_{n+1})), \quad y_n\in T(u_n),$$

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le (1+(n+1)^{-1})H(G(u_n),G(u_{n+1})), \quad z_n\in G(u_n),$$

然后再利用

$$u_{n+1} = u_n - p(u_n) + J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_n) - \rho N(x_n,y_n))$$

构造出序列 $\{u_n\}$。这表明利用 Nadler 定理来选取序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 运算量特别大且过程特别复杂，而本文的扰动迭代算法则显得简洁，而且运算量少，迭代次数少。

本文的扰动迭代算法与 Huang[2] 中的算法 5.1 及 Kazmi[1] 中的 Ishikawa 型扰动迭代算法相比，本文的算法更具一般性。本文算法中的误差项分别为 e_n 和 f_n，均与前几项线性无关，而 Huang[2] 的算法 5.1 及 Kazmi[1] 的扰动迭代算法中的误差项分别为 $\alpha_n e_n$，$\beta_n f_n$ 以及 e_n，$\beta_n r_n$，它们均有一个或两个误差项与前几项线性相关，因此本文的算法更具一般性。本文的算法对 Huang[2] 提供了构造算法的新思路，新途径。

参考文献：

[1] Kazmi K R. Mann and Ishikawa type perturbed iterative algorithms for generalized quasi-variational inclusions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 209: 572-584

[2] Huang N J. Generalized nonlinear mixed quasi-variational inequalities[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2000, 10: 205-215

[3] Liu L W, Li Y Q. On generalized set valued variational inclusions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 261: 231-240
[4] Chang S S. Variational Inequality and Complementarity Problem Theory with Applications[M]. Shanghai: Shanghai Scientfic and Tech, 1991
[5] Minty G J. On the monotonicity of the gradient of a convex function[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1964, 14: 243-247
[6] 曾六川. Lipschitz 强增生算子方程解得 Ishikawa 迭代逼近[J]. 数学杂志，2003, 23: 71-77
[7] Siddiqi A H, Ansari Q H. An iterative method for generalized variational inequalities[J]. Mathematica Japonica, 1989, 34: 475-481
[8] Nadler S B. Multi-valued conaction mapping[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1969, 30: 475-488

The Perturbed Iterative Algorithm for Generalized Nonlinear Set-valued Mixed Quasi-variational Inequalities

HU Hui-ying, ZENG Liu-chuan

(College of Mathematics and Science, Shanghai Normal University, Shanghai 200234)

Abstract: A class of generalized nonlinear set-valued mixed quasi-variational inequalities is studied in this paper. Firstly, it is shown that the set-valued mapping in the result of Huang is actually single-valued by virtue of the result of Liu and Li. Secondly, the existence of solution for this class of mixed quasi-variational inequalities is proved by the method of Siddiqi and Ansari, and a new perturbed iterative algorithm for this class of mixed quasi-variational inequalities is designed. Finally, the convergence criteria for this new perturbed iterative algorithm is discussed.

Keywords: set-valued mixed quasi-variational inequality; perturbed iterative algorithm; maximal monotone mapping; fixed point theory